

## Exercices corrigés sur les coniques

### Exercice N°1 :

Dans le plan on donne une droite  $(\Delta)$  et un point  $O$  n'appartenant pas à  $(\Delta)$ . On note  $H$  le projeté orthogonal de  $O$  sur  $(\Delta)$  et soit  $P$  un point variable sur  $(\Delta)$ . La perpendiculaire à  $(\Delta)$

et la perpendiculaire en  $O$  à la droite  $(OP)$  se coupent en un point  $M$  ; soit  $I$  le milieu de  $[PM]$ .

1- Montrer que lorsque  $P$  décrit  $(\Delta)$  le point  $I$  appartient à une parabole  $(P)$  dont on précisera le foyer et la directrice

2- On considère un repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  où  $\vec{OH} = \vec{i}$

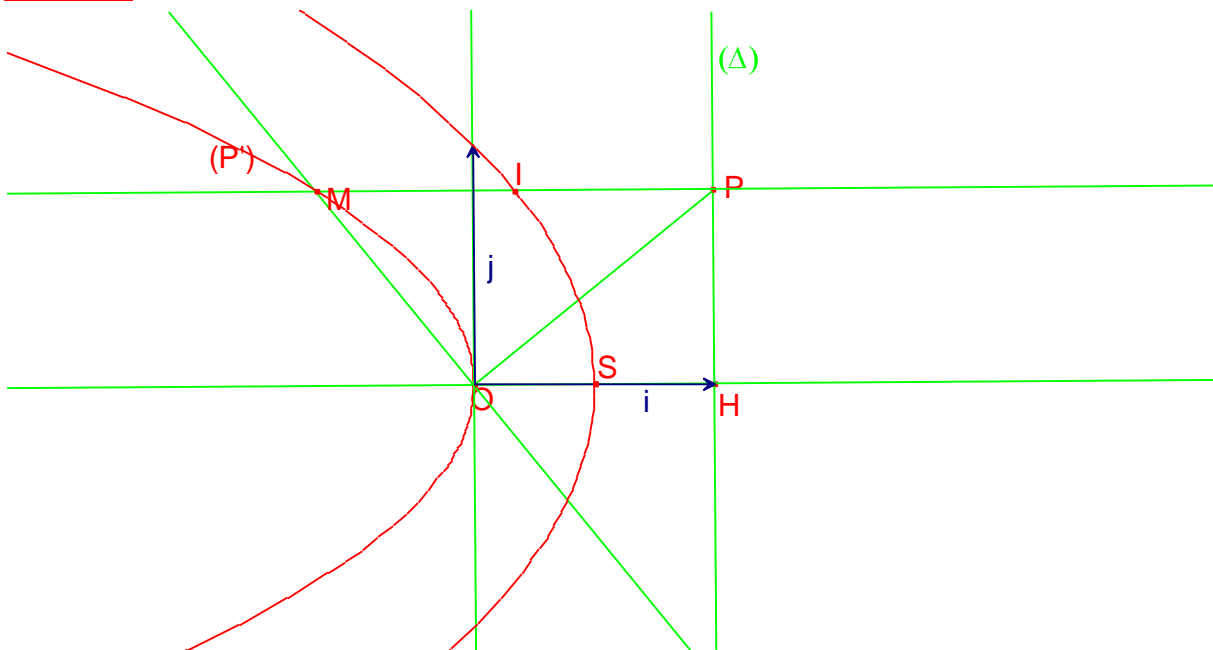
a- On note  $(x, y)$  les coordonnées de  $M$  dans le repère  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ . Calculer le produit scalaire  $\vec{OM} \cdot \vec{OP}$  et en déduire l'équation cartésienne de l'ensemble  $(P')$  décrit par le point  $M$  quand  $P$  décrit  $(\Delta)$

b- Montrer que  $(P')$  est une parabole dont on précisera le foyer  $O'$  et la directrice  $(\Delta')$

3- Construire  $(P')$  dans le repère  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  et en déduire une construction de  $(P)$  à partir de  $(P')$ . Justifier que le sommet  $S$  de  $(P)$  est le milieu de  $[OH]$

et déterminer l'équation cartésienne de  $(P)$  dans  $(S, \vec{i}, \vec{j})$  puis dans  $(o, \vec{i}, \vec{j})$

### Correction :



1- On a le triangle  $OPM$  est rectangle en  $O$  et  $I$  le milieu de  $[PM]$  donc  $OI=IP=IM$  et  $P$  est le projeté orthogonal de  $I$  sur  $(\Delta)$  donc le point  $I$  décrit la parabole de foyer  $O$  et de directrice  $(\Delta)$

2-On a  $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $P \in (\Delta)$  donc  $\overrightarrow{OP} \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP} = x + y^2$  et puisque  $(OM)$  est perpendiculaire à  $(OP)$  donc  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$  et par suite l'équation

cartésienne de  $(P')$  est  $(P) : y^2 = -x$ ; de la forme  $y^2 = -2\left(\frac{1}{2}\right)x = -2px$ ; le paramètre de  $(P')$  est  $p = \frac{1}{2}$  donc le

foyer  $F$  a pour coordonnées  $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$  et la directrice  $(D)$  a pour équation  $x = \frac{1}{4}$ ; le sommet de  $(P')$  est  $O$

3-Soit  $S$  le sommet de  $(P)$  donc  $S \in [OH]$  et  $O \in (P')$  et  $H$  le projeté orthogonale de  $O$  sur  $(\Delta)$  donc d'après la construction d'un point de  $(P)$  on aura  $S = O^* H$ . Le paramètre de  $(P)$  est  $p = OH = 1$  donc l'équation de

$(P)$  dans  $(S, \vec{i}, \vec{j})$  est  $Y^2 = -2X$ . On a  $S$  a pour coordonnées dans  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  :  $S\left(\frac{1}{2}, 0\right)$  donc les équations de

changement de repère sont :  $\begin{cases} X = x - \frac{1}{2} \\ Y = y \end{cases}$  et par suite l'équation de  $(P)$  dans  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  est  $(P) : y^2 = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

### Exercices N°2 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(o, \vec{u}, \vec{v})$ .

1- On considère les points  $A(-1,0)$  et  $I(4,0)$ . Soit  $\epsilon$  l'ellipse de centre  $I$ , dont un sommet est  $A$  et un foyer est  $O$ .

a- Déterminer les trois autres sommets de  $(E)$

b- Calculer l'excentricité de  $(E)$ , et donner une équation de sa directrice associée au foyer  $O$  dans le repère  $(o, \vec{u}, \vec{v})$

c- Former une équation de  $(E)$  dans le repère  $(I, \vec{u}, \vec{v})$  d'origine le centre de l'ellipse

d- Tracer  $(E)$

2- Soit l'équation  $(E_\theta) : z^2 - z + (4\cos\theta + 5)^2 = 0$ ;  $\theta \in [0, \pi]$

a- Résoudre  $(E_\theta)$ . On note  $z_1$  la solution dont la partie imaginaire est strictement positive  $z_2$  l'autre solution

b- Lorsque  $\theta$  décrit l'intervalle  $[0, \pi]$ , déterminer l'ensemble des points  $M_1$  d'affixe  $z_1$  dans le repère  $(I, \vec{u}, \vec{v})$ . En déduire l'ensemble des points  $M_2(z_2)$

### Correction :

1-a-Détermination des sommets de  $(E)$

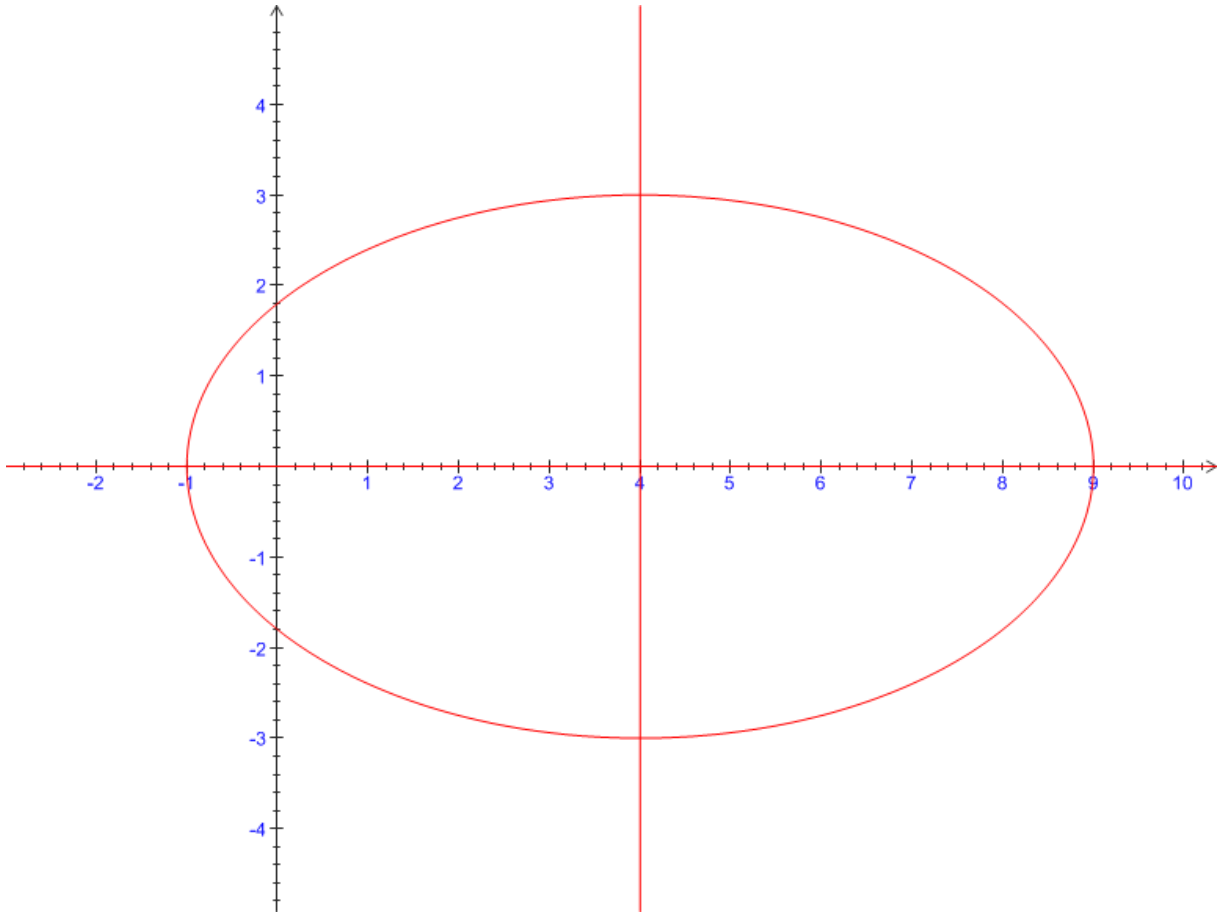
On a  $A(-1,0)$  est un point de l'axe des abscisses. et  $A$  est un sommet de  $(E)$  de foyer  $O$  donc  $(ox)$  est l'axe focal de  $(E)$ ; l'axe non focal de  $(E)$  est donc la droite passant par  $I$  et parallèle à l'axe des ordonnées et pour sommets les points  $A' = S_I(A)$  donc  $A'(4+5,0)$ . Les sommets  $B$  et  $B'$  de l'axe non focal sont les points d'abscisse 4 tels que  $IB = IB'$  et  $IO^2 = IA^2 - IB^2$  on a donc  $IB = IA^2 - IO^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$  et par suite  $B(4,3)$  et  $B'(4,-3)$

b- L'excentricité de (E) est  $e = \frac{IO}{IA} = \frac{4}{5}$

L'équation de la directrice (D) associée à O, dans le repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  est (D) :  $x = 4 - \frac{IA^2}{IO} = -\frac{9}{4}$

c- L'équation de (E) dans le repère  $(I, \vec{u}, \vec{v})$  est :  $\frac{X^2}{IA^2} + \frac{Y^2}{IB^2} = 1$  soit  $\frac{X^2}{5^2} + \frac{Y^2}{3^2} = 1$

d-



2- a -  $(E_\theta) : z^2 - 2(4 + 5\cos\theta)z + (4\cos\theta + 5)^2 = 0 ; \theta \in [0, \pi]$

$\Delta' = (4 + 5\cos\theta)^2 - (4\cos\theta + 5)^2 = -9\sin^2\theta = (3i\sin\theta)^2$

donc  $z_1 = 4\cos\theta + 5 + 3i\sin\theta$  et  $z_2 = 4\cos\theta + 5 - 3i\sin\theta = \overline{z_1}$

Les coordonnées de  $M_1$  dans le repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  sont donc  $M_1(4\cos\theta + 5, 3\sin\theta)$  et dans le repère  $(I, \vec{u}, \vec{v})$  on aura  $M_1(5\cos\theta, 3\sin\theta)$  en

effets :  $\overrightarrow{IM_1} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OM_1} = -4\vec{u} + (4 + 5\cos\theta)\vec{u} + (3\sin\theta)\vec{v} = (5\cos\theta)\vec{u} + (3\sin\theta)\vec{v}$

On pose  $M_1(X, Y)$  avec  $X = 5\cos\theta$  et  $Y = 3\sin\theta$ . L'équation cartésienne de l'ensemble des points  $M_1$  dans le repère  $(I, \vec{u}, \vec{v})$  est :

$(I, \vec{u}, \vec{v})$  est alors  $\frac{X^2}{5^2} + \frac{Y^2}{3^2} = 1$  avec  $Y > 0$  car  $\theta \in [0, \pi]$  donc  $Y = 3\sin\theta > 0$  ainsi l'ensemble des points  $M_1$

est l'arc de l'ellipse  $(E)$  situé au-dessus de l'axe des abscisses et on a  $z_2 = \overline{z_1}$  donc  $M_2$  est le symétrique de  $M_1$  par rapport à l'axe des abscisses et l'ensemble des points  $M_2$  est alors l'arc de  $(E)$  situé au-dessous de l'axe des abscisses

### **Exercice N°3 :**

On considère dans le plan orienté un triangle  $AFB$  rectangle en  $A$  et on pose  $\theta$  une mesure de

$\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BF}$  ;  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ . Soit  $M$  un point quelconque du plan. On trace par  $M$  les parallèles aux droites

$(AF)$  et  $(FB)$  qui rencontrent la droite  $(AB)$  respectivement en  $H$  et  $M'$ . On appelle  $(C)$  l'ensemble des points du plan tels que  $MM' = MF$

1-Montrer que  $M$  appartient à  $(C)$  si, et seulement si :  $\frac{MF}{MH} = \frac{1}{\sin\theta}$ . En déduire que  $(C)$  est une conique

que l'on précisera

2-Dans cette question on prend  $FA = 6\text{cm}$  et  $\theta = \frac{\pi}{6}$ .

a-Après avoir construit le triangle  $AFB$ , représenter les sommets, les foyers et le centre de la conique  $(C)$  puis construire  $(C)$

b-Un point  $M'$  de  $(AB)$  est donné. Construire alors un point  $M$  de  $(C)$

c-Montrer que la droite  $(D)$  passant par  $O$  et parallèle à  $(BF)$  est une asymptote de  $(C)$  puis construire  $(C)$

### **Correction :**

On a le triangle  $M'HM$  rectangle en  $H$  et on a  $(M'M) \parallel (BF)$  donc  $\widehat{(BH, BF)} \equiv \widehat{(M'H, M'M)} = 2\pi$   
 $\equiv \theta = 2\pi$  si  $M \notin (AB)$

Donc et ceci est encore valable si  $M \in (AB)$ ,  $M'M = \frac{MH}{\sin\theta}$

Par suite, on a  $M \in (C) \Leftrightarrow \frac{MH}{\sin\theta} = MF$ . si  $M \in (AB)$  donc  $MH=0$  donc  $M \notin (C)$

$M \in (C) \Leftrightarrow \frac{MF}{MH} = \frac{1}{\sin \theta}$  donc  $(C)$  est une conique de directrice  $(AB)$  et d'excentricité  $\frac{1}{\sin \theta}$  ;

$\theta \in ]0, \pi[$  donc  $\sin \theta \in ]0, 1[$  donc  $\frac{1}{\sin \theta} > 1$  et par suite  $(C)$  est une hyperbole

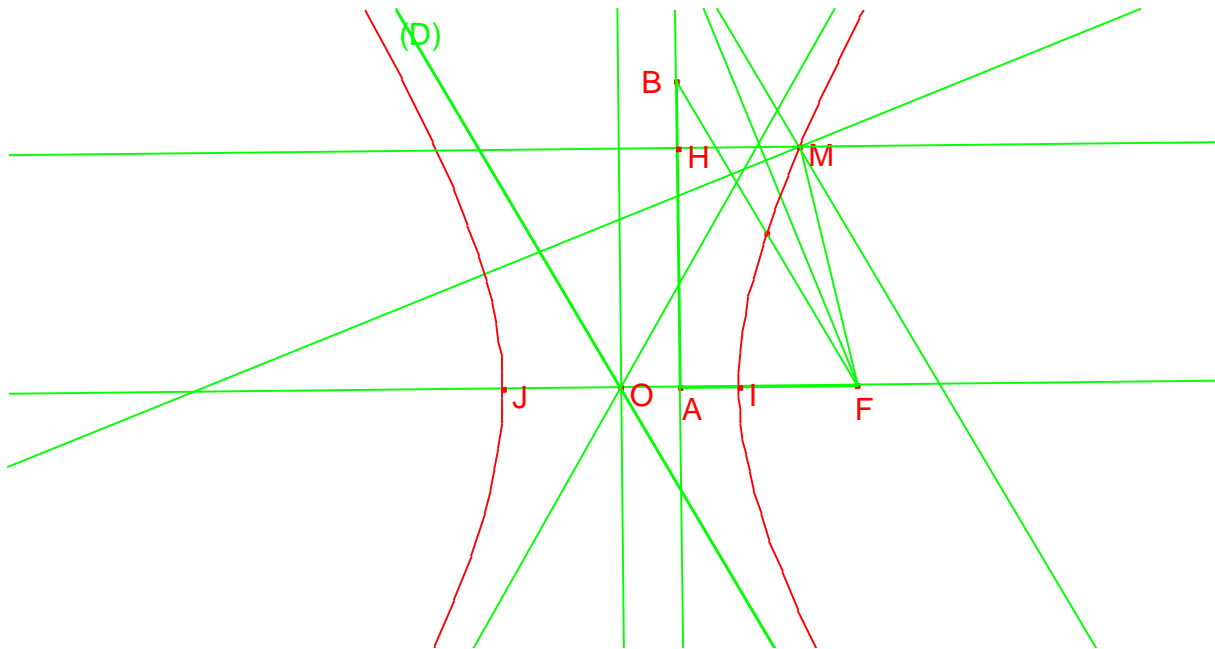
2-  $\theta = \frac{\pi}{6}$  donc l'hyperbole  $(C)$  a pour excentricité  $\frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2$

Les sommets de  $(C)$  sont par conséquent les points  $I$  et  $J$  de l'axe transverse  $(AF)$  déterminer par

$$\overrightarrow{IF} = -2\overrightarrow{IA} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{JF} = 2\overrightarrow{JE} \quad \text{et par suite} \quad \overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AF} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AF}$$

Le centre  $O$  de  $(C)$  est alors le milieu de  $[IJ]$ , le deuxième foyer est  $F' = S_O(F)$

La droite  $(D)$  passant par  $O$  et parallèle à  $(BF)$  est une asymptote de  $(C)$  puisque si l'on désigne par  $M'_0$  le point d'intersection des droites  $(D)$  et  $(AB)$  on a la médiatrice de  $[M'_0F]$  est alors parallèle à  $(D)$



#### Exercice N°4

$FGH$  est un triangle équilatéral de côté de longueur  $L$ . Soit  $(H)$  l'hyperbole de foyer  $F$  de directrice  $(GH)$  et d'excentricité 2

1-Déterminer les sommets  $S$  et  $S'$  de cette hyperbole ( On remarquera que  $S$  et  $S'$  sont sur la hauteur issue de  $F$  dans le triangle  $FGH$ ), son centre  $O$  et le deuxième foyer  $F'$ . Calculer en Fonction de  $L$ , la distance des sommets  $2a$  et la distance des foyers  $2c$

2-On choisit le repère orthonormé  $O, \vec{u}, \vec{v}$  où  $O$  est le centre de l'hyperbole et  $\vec{u}$  un vecteur unitaire de la demi droite  $OF$ . Ecrire une équation de  $(H)$ . Donner l'allure de  $(H)$

Correction :

On a  $F$  est un foyer de  $(H)$  et  $(GH)$  la directrice associé donc les sommets  $S$  et  $S'$  sont situés sur la perpendiculaire à  $(GH)$  issue de  $F$ . Soit  $K$  le projeté orthogonale de  $F$  sur  $(GH)$ ; puisque  $e=2$  on aura  $\vec{SF} = -2\vec{SK}$  donc  $S$  est le centre de gravité du triangle  $FGH$  puisqu'il est équilatérale et la hauteur issue de  $F$  est une médiane de  $FGH$

Le sommet  $S'$  vérifie  $\overrightarrow{S'F} = 2\overrightarrow{S'K}$  donc  $S_K(F)=S'$ ;  $O=S*S'$  et  $F'=S_O(F)$

La distance des sommets est  $2a = SS' = SK + KS'$  et on a  $SK$

$$= \frac{1}{3} FK = \frac{1}{3} \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{l\sqrt{3}}{6} \text{ et } KS' = KF = \frac{l\sqrt{3}}{2} \text{ donc on obtient } 2a = SS' = \frac{4l\sqrt{3}}{6} = \frac{2l\sqrt{3}}{3}$$

LA distance focal est  $2c = FF' = 2FO = 2(FS + SO) = \frac{4}{3} FK + SS' = \frac{4}{3} \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{4l\sqrt{3}}{3}$

2- L'équation de (H) est  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ;  $a^2 = \frac{l^2}{3}$  ;  $b^2 = c^2 - a^2 = l^2$

L'équation de (H) est alors (H) :  $\frac{x^2}{\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2} - \frac{y^2}{l^2} = 1$

Les asymptote de (H) sont (D) :  $y = -\frac{b}{a}x = -\sqrt{3}x$  et (D') :  $y = \frac{b}{a}x = \sqrt{3}x = \text{tg } \frac{\pi}{3}x$ . Le triangle OHS est

équilateral puisque l'on a  $OK = KS = \frac{1}{2} SF = \frac{1}{2} SH$  donc les asymptote sont les droites (OH) et (OG)

