

CORRIGE EX N°1:

/

1)a) La fonction $x \rightarrow \text{tg}(x)$ est dérivable et strictement croissante sur

$$\mathcal{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, \text{ puisque } \text{tg}'(x) = 1 + \text{tg}^2(x).$$

$$\text{Par suite lorsque } x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[\text{ on a } x > -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \text{tg}(x) > \text{tg}(-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \text{tg}(x) > -1 \\ \Rightarrow \text{tg}(x) + 1 > 0.$$

Il s'en suit alors que la fonction $f(x) = \sqrt{1 + \text{tg}(x)}$ est dérivable sur $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ et

$$f'(x) = \frac{1}{2} (1 + \text{tg}^2(x))(1 + \text{tg}(x))^{-1/2} = \frac{1 + \text{tg}^2(x)}{2\sqrt{1 + \text{tg}(x)}}.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{4})^+} \frac{f(x) - f(-\frac{\pi}{4})}{x + \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{4})^+} \frac{\sqrt{1 + \text{tg}(x)}}{x + \frac{\pi}{4}} \quad (f(-\frac{\pi}{4}) = 0). \\ = \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{4})^+} \frac{1 + \text{tg}(x)}{\sqrt{x + \frac{\pi}{4}} \sqrt{x + \frac{\pi}{4}}} = \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{4})^+} \frac{1 + \text{tg}(x)}{x - (-\frac{\pi}{4})}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{4})^+} \frac{1 + \text{tg}(x)}{x - (-\frac{\pi}{4})} = \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{4})^+} \frac{\text{tg}(x) - \text{tg}(-\frac{\pi}{4})}{x - (-\frac{\pi}{4})} : \text{c'est le nombre dérivé de la fonction tg}$$

en $-\frac{\pi}{4}$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{4})^+} \frac{1 + \text{tg}(x)}{x + \frac{\pi}{4}} = 1 + \text{tg}^2(-\frac{\pi}{4}) = 2$$

$$\text{D'autre part on a : } \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{4})^+} \frac{1}{\sqrt{x + \frac{\pi}{4}}} = 1/0^+ = +\infty.$$

$$\text{On obtient, enfin, } \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{4})^+} \frac{f(x) - f(-\frac{\pi}{4})}{x + \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} (+\infty) = +\infty. \text{ Ce qui ne permet pas à } f$$

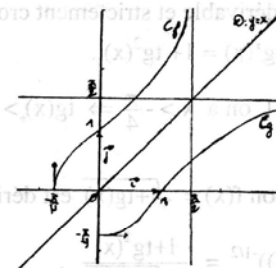
d'être dérivable à droite en $-\frac{\pi}{4}$. De plus la courbe C_f de f aura au point $(-\frac{\pi}{4}, 0)$ une demi tangente verticale dirigée vers le haut.

$$\text{c) } \forall x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[, f'(x) = \frac{1 + \text{tg}^2(x)}{2\sqrt{1 + \text{tg}(x)}} > 0, \text{ donc } f \text{ est strictement croissante sur }]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \sqrt{1 + \text{tg}(x)}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \text{tg}(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = +\infty$$

$$\text{Par suite } \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = +\infty.$$

d) $f(0) = 1$, donc C_f coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0,1)$ La droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est une asymptote pour C_f , courbe dont l'allure est :(C_f est réduite à 50%)2)a) D'après le tableau de variations de f , on constate que cette fonction est strictement croissante et continue de $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ dans l'intervalle $I = [0, +\infty[$, il en résulte que f est une bijection de $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ dans $[0, +\infty[$.

$$\text{b) } * x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[\text{ et } \text{tg}(0) = x \Leftrightarrow x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[\text{ et } f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[\text{ et } \sqrt{1 + \text{tg}(x)} = 0 \\ \Leftrightarrow x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[\text{ et } \text{tg}(x) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{Donc } g(0) = -\frac{\pi}{4}.$$

$$* x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[\text{ et } \text{tg}(1) = x \Leftrightarrow x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[\text{ et } f(x) = 1 \Leftrightarrow x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[\text{ et } \sqrt{1 + \text{tg}(x)} = 1$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[\text{ et } \text{tg}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Donc } g(1) = 0.$$

$$* x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[\text{ et } \text{tg}(\sqrt{2}) = x \Leftrightarrow x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[\text{ et } f(x) = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[\text{ et } \sqrt{1 + \text{tg}(x)} = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[\text{ et } \text{tg}(x) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Donc } g(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}.$$

c) On a $C_g = S_D(C_f)$ où D est la droite d'équation : $y = x$.

Remarquons aussi que :

$$* \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = +\infty \text{ donne } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{\pi}{2}, \text{ par suite la droite d'équation } y = \frac{\pi}{2}$$

est une asymptote pour C_g au voisinage de $+\infty$.* C_f admet au point $(-\frac{\pi}{4}, 0)$ une demi tangente verticale dirigée vers le haut, donc C_g admet au point $(0, -\frac{\pi}{4})$ une demi tangente horizontale dirigée vers la droite.* C_f coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0,1)$, par suite C_g coupe

f' ne s'annule pas sur $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ donc g est dérivable sur $f(]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[)$ c'est à dire sur $]0, +\infty[$, de plus $g'(x) = \frac{1}{f(g(x))}$.

D'autre part C_g admet au point $(0, -\frac{\pi}{4})$ une tangente horizontale donc g est dérivable à droite en 0 et $g'_d(0) = 0$.

Remarque :

Soit f une fonction bijective d'un intervalle I dans un autre J . On note f^{-1} sa bijection réciproque. Trois cas sont possibles :

*) Si f est dérivable en un point x_0 de I est $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$. Par conséquent si f est dérivable sur une partie E de I et $\forall x \in E$

$f'(x) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable sur $f(E)$ et $\forall x \in f(E)$, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Ceci est un résultat du cours.

*) Si f est dérivable en un point x_0 de I est $f'(x_0) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en $f(x_0)$. L'élève doit justifier cette conclusion graphiquement en écrivant :

$f'(x_0) = 0 \Rightarrow C_f$ (courbe de f) admet au point $(x_0, f(x_0))$ une tangente horizontale \Rightarrow

C_g (courbe de g) admet au point $(f(x_0), x_0)$ une tangente verticale $\Rightarrow g$ n'est pas dérivable en $f(x_0)$.

*) Si f n'est pas dérivable en un point x_0 de I et $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ (la limite en x_0 peut être à droite ou à gauche), alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et $(f^{-1})'(f(x_0)) = 0$.

L'élève doit justifier cette conclusion graphiquement en écrivant :

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty \Rightarrow C_f$ admet au point $(x_0, f(x_0))$ une tangente verticale (si x tend vers x_0^+ ou vers x_0^- on aura une demi tangente verticale) \Rightarrow

C_g (courbe de g) admet au point $(f(x_0), x_0)$ une tangente (ou demi tangente) horizontale $\Rightarrow g$ est dérivable en $f(x_0)$ et $(f^{-1})'(f(x_0)) = 0$.

Cherchons l'expression de $g'(x)$ pour $x \in]0, +\infty[$.

$$\forall x > 0; g'(x) = \frac{1}{f(g(x))} = \frac{2\sqrt{1+tg(g(x))}}{1+tg^2(g(x))}$$

Or pour $x \geq 0$ on a : $f(g(x)) = \sqrt{1+tg(g(x))} = x$ ce qui donne $tg(g(x)) = x^2 - 1$.

$$\text{Par suite } \forall x > 0, \text{ on a : } g'(x) = \frac{2\sqrt{1+x^2-1}}{1+(x^2-1)} = \frac{2x}{x^4-2x^2+2}$$

On remarque aussi que $\frac{2(0)}{0^4-2(0)^2+2} = 0 = g'(0)$. On conclut alors que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, g'(x) = \frac{2x}{x^4-2x^2+2}$$

4a) Comme f, g est strictement croissante sur son ensemble de définition c'est à dire

$$\Rightarrow (2n - n + 1)g(n) \leq \sum_{k=n}^{2n} g(k) \leq (2n - n + 1)g(2n)$$

$$\Rightarrow (n + 1)g(n) \leq \sum_{k=n}^{2n} g(k) \leq (n + 1)g(2n)$$

$$\Rightarrow g(n) \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} g(k) \leq g(2n)$$

$$\Rightarrow g(n) \leq U_n \leq g(2n)$$

$$\text{b) On a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(2n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

D'autre part $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = +\infty$ donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{\pi}{2}$ (puisque $g = f^{-1}$).

Donc, à fortiori, $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{\pi}{2}$.

CORRIGE EX N°2:

1)a) La fonction $x \rightarrow 2x - x^2$ est manifestement dérivable et strictement positive sur $]1,2[$, donc la fonction $x \rightarrow \sqrt{2x-x^2}$ est dérivable sur $]1,2[$.

En plus de ça la fonction $x \rightarrow x-1$ est dérivable et non nulle sur $]1,2[$

Il en résulte que f est dérivable sur $]1,2[$ en tant que quotient de telles fonctions et

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}(2-2x)}{\sqrt{2x-x^2}} \frac{(x-1)-\sqrt{2x-x^2}}{(x-1)^2} = \frac{(1-x)(x-1)-\sqrt{2x-x^2}}{(x-1)^2 \sqrt{2x-x^2}} = \frac{-(x-1)^2 - (2x-x^2)}{(x-1)^2 \sqrt{2x-x^2}}$$

$$= \frac{-1}{(x-1)^2 \sqrt{2x-x^2}}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x-x^2}}{(x-1)(x-2)} = 0/0$: une forme indéterminée.

Cependant, on peut écrire : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x(2-x)}}{(x-1)(x-2)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-\sqrt{x}}{x-1} \sqrt{\frac{2-x}{(x-2)^2}} \quad (\text{à gauche de 2}$$

on a : $x-2 < 0$)

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-\sqrt{x}}{x-1} \sqrt{\frac{1}{2-x}} = \frac{-\sqrt{2}}{2-1} \sqrt{\frac{1}{0^+}} = -\infty.$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en 2 et le fait que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = -\infty$ prouve que

la courbe C_f de f admet au point $(2,0)$ une demi tangente verticale dirigée vers le haut

c) $\forall x \in]1,2[$, $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2 \sqrt{2x-x^2}} < 0$; donc f est strictement décroissante sur $]1,2[$

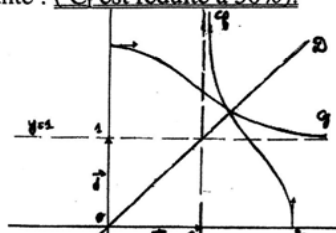
$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x-1} = 1/0^+ = +\infty$; $f(2) = 0$; les variations de f se résument donc

dans le tableau suivant :

x	1	2
f	$+\infty$	0

La droite d'équation $x = 1$ est une asymptote pour C_f ; puisque $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

L'allure de C_f sera donc, la suivante : (C_f est réduite à 50%).



*Il faut, toutefois, attirer l'attention de l'élève au fait que la négligence de l'unité de longueur imposée peut diminuer la note attribuée à la construction de la courbe.

2)a) $\forall x \in]1,2[$, on pose $u(x) = f(x) - x$.

Il est évident que u est dérivable sur $]1,2[$ et que $u'(x) = f'(x) - 1$.

$\forall x \in]1,2[$, $u'(x) < 0$ puisque $f'(x) \leq 0$.

On en tire que u est continue et strictement décroissante sur $]1,2[$, elle réalise ainsi une bijection de cet intervalle dans $u(]1,2[) = [u(2), \lim_{x \rightarrow 1^+} u(x) [$.

Mais $u(2) = f(2) - 2 = -2$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} u(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x) - x) = +\infty - 1 = +\infty$

$\Rightarrow u$ est une bijection de $]1,2[$ dans $[-2, +\infty [$.

0 est un réel de $[-2, +\infty [$; il admet alors, par u , un antécédent unique α dans $]1,2[$

Ce qui veut dire qu'il existe un seul réel α dans $]1,2[$ tel que $u(\alpha) = 0$ ou plus exactement tel que $f(\alpha) = \alpha$.

b) $u(\frac{3}{2}) = f(\frac{3}{2}) - \frac{3}{2} = \sqrt{3} - \frac{3}{2} > 0$; $u(2) = -2 < 0$; $u(\alpha) = 0$ et u est continue sur

$[\frac{3}{2}, 2]$. Ce qui montre, grâce au théorème des valeurs intermédiaires, que $\alpha \in]\frac{3}{2}, 2[$.

3)a) D'après le tableau de variations de f , on constate que cette fonction est continue et strictement décroissante de l'intervalle $]1,2[$ dans $[0, +\infty [$. f réalise, alors, une bijection de $]1,2[$ dans $I = [0, +\infty [$.

b) On sait que $C_g = S_D(C_f)$, D étant la droite d'équation : $x = y$.

* C_f admet au point $(2,0)$ une demi tangente verticale dirigée vers le haut ($y \geq 0$)

donc C_g admet au point $(0,2)$ une demi tangente horizontale dirigée vers la droite ($x \geq 0$).

*La droite d'équation $y = 1$ est une asymptote pour C_g , puisque la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote pour C_f .

L'allure de C_g est indiquée dans la même figure de C_f .

c) Pour trouver $g(x)$ en fonction de x , il suffit de résoudre l'équation (E) : $f(x) = y$ où x est l'inconnu dans $]1,2[$ et y un paramètre de $[0, +\infty [$.

(E) $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x-1} = y$, or $y \geq 0$ et $\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$ est définie et positive pour $x \in]1,2[$.

Par suite (E) $\Leftrightarrow \frac{2x-x^2}{(x-1)^2} = y^2 \Leftrightarrow 2x - x^2 = y^2 x^2 - 2xy^2 + y^2$

$$\Leftrightarrow x^2(-1-y^2) + 2x(1+y^2) - y^2 = 0.$$

C'est une équation du second degré dont le discriminant réduit est

$$\Delta' = ((1+y^2)^2 - (-1-y^2)(-y^2)) = 1+y^4+2y^2-y^2-y^4 = 1+y^2 > 0.$$

On en tire que $x = \frac{-1-y^2-\sqrt{1+y^2}}{-1-y^2} = \frac{1+y^2+\sqrt{1+y^2}}{1+y^2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$

$$\text{ou } x = \frac{-1-y^2+\sqrt{1+y^2}}{-1-y^2} = \frac{1+y^2-\sqrt{1+y^2}}{1+y^2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

Mais $x > 1$ et $1 - \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} < 1$, donc $x = 1 + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} = f^{-1}(y) = g(y)$.

CORRIGE EX N°4:**A/**

1)a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1 + \sqrt{1+x^2}}{x} = 0/0$, une forme indéterminée, cependant on a

$$f(x) = \frac{-1 + \sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{(-1 + \sqrt{1+x^2})(1 + \sqrt{1+x^2})}{x(1 + \sqrt{1+x^2})} = \frac{x^2}{x(\sqrt{1+x^2} + 1)} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2} + 1} \text{ par suite}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{1+x^2} + 1} = 0/2 = 0 = f(0).$$

Donc f est continue en 0.

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + 1} = \frac{1}{2}$$

On déduit que f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = \frac{1}{2}$.

$$2)a) T: y = f'(0)(x-0) + f(0) \quad , \text{ or } f'(0) = \frac{1}{2} \text{ et } f(0) = 0 \text{ donc } T: y = \frac{1}{2}x$$

On a déjà remarqué dans la question précédente que $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2} + 1}$ donc

$$f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2} + 1} - \frac{1}{2}x = \frac{2x - x(\sqrt{1+x^2} + 1)}{2(\sqrt{1+x^2} + 1)} = \frac{2x - x\sqrt{1+x^2} - x}{2(\sqrt{1+x^2} + 1)} = \frac{x(1 - \sqrt{1+x^2})}{2(\sqrt{1+x^2} + 1)}$$

Mais pour $x \geq 0$ on a $1 + x^2 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{1+x^2} \geq 1 \Rightarrow 1 - \sqrt{1+x^2} \leq 0$

$$\Rightarrow f(x) - \frac{1}{2}x \leq 0.$$

On en tire alors que C est située au dessous de T .

b) $\forall x \in \mathcal{R}_+$, on a $1 + x^2 > 0$ donc la fonction $x \rightarrow \sqrt{1+x^2}$ est dérivable sur \mathcal{R}_+ . Il s'en suit que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}2x \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)x - (-1 + \sqrt{1+x^2})}{x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1 - \sqrt{1+x^2}}{x^2} = \frac{x^2 + \sqrt{1+x^2} - (1+x^2)}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2 \sqrt{1+x^2}}. \text{ Le signe de } f' \text{ sur }]0, +\infty[\text{ est celui de } \sqrt{1+x^2} - 1, \text{ mais on a déjà}$$

établit dans la question précédente que sur $]0, +\infty[$, $\sqrt{1+x^2} - 1 \geq 0$

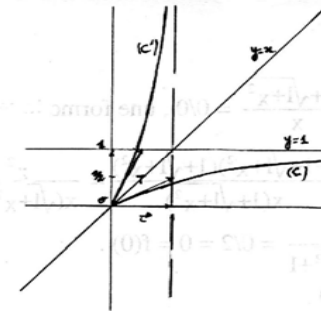
On conclut, alors, que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{x} + \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} \right) = 1$$

Les variations de f se résument dans le tableau suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\frac{1}{2}$	+
f	0	1

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ donc la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote pour C au voisinage de $+\infty$. L'allure de C est indiquée dans la figure suivante : **(C est réduite à 50%)**



3)a) D'après le tableau de variations de f , on constate qu'elle est continue et strictement croissante de $[0, +\infty[$ dans $[0, 1[$. Il en résulte que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ dans l'intervalle $I = [0, 1[$.

$$b) \forall x \in \mathcal{R}_+^* \text{ et } \forall y \in]0, 1[, f(x) = y \Leftrightarrow \frac{-1 + \sqrt{1+x^2}}{x} = y \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} = xy + 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + x^2 = (xy + 1)^2 \Leftrightarrow 1 + x^2 = x^2y^2 + 2xy + 1$$

$$\Leftrightarrow x = xy^2 + 2y \quad (\text{on a divisé par } x \text{ qui est } \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2y}{1-y^2} \quad (1 - y^2 \neq 0 \text{ car } y \neq 1)$$

En changeant la notation, on obtient $\forall x \in]0, 1[, f^{-1}(x) = \frac{2x}{1-x^2}$.

Ajoutons que $f(0) = 0$ donne $f^{-1}(0) = 0$. On peut affirmer, alors, que :

$$\forall x \in [0, 1[, f^{-1}(x) = \frac{2x}{1-x^2}.$$

c) $C' = S_D(C)$, D est la droite d'équation $x = y$.

En particulier la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote pour C' , courbe dont l'allure est indiquée dans la figure ci-dessus.

B/

1) La fonction $x \rightarrow \cotg x$ est définie et dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\cotg'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} < 0$

\Rightarrow La fonction $x \rightarrow \cotg x$ est strictement décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, il en découle alors

que si $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cotg x \in [\cotg \frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow 0^+} \cotg x [$.

Or $\cotg \frac{\pi}{2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cotg x = +\infty$. Donc $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cotg x \in [0, +\infty[$ ce qui justifie

l'existence de $f(\cotg x)$ pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et par conséquent la définition de h sur cet intervalle.

$$2) \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{h(x) - h(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{f(\cotg x) - f(\cotg \frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{f(\cotg x) - f(\cotg \frac{\pi}{2})}{\cotg x - \cotg \frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\cotg x - \cotg \frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}}$$

Mais $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \cotg x = \cotg \frac{\pi}{2} = 0$, donc

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{f(\cotg x) - f(\cotg \frac{\pi}{2})}{\cotg x - \cotg \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(X) - f(0)}{X - 0} \quad (X = \cotg x)$$

$$= f'(0) = \frac{1}{2}$$

D'autre part $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\cotg x - \cotg \frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}} = \cotg'(\frac{\pi}{2})$: nombre dérivé de la fonction \cotg en $\frac{\pi}{2}$

$$= \frac{-1}{\sin^2(\frac{\pi}{2})} = -1$$

On obtient alors $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{h(x) - h(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} = (\frac{1}{2})(-1) = -\frac{1}{2}$. Ceci montre que h est dérivable à gauche en $\frac{\pi}{2}$ et que $h'_g(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}$.

3) $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $h(x) = f(\cotg x) = \frac{-1 + \sqrt{1 + \cotg^2 x}}{\cotg x}$, or $1 + \cotg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

et $\cotg x = \frac{\cos x}{\sin x}$; on aura alors : $h(x) = \frac{-1 + \frac{1}{|\sin x|}}{\frac{\cos x}{\sin x}}$

$$= \frac{-1 + \frac{1}{\sin x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} \quad (\text{pour } x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \sin x > 0)$$

$$= \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

4) $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $h(x) = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$, donc h est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ en tant que rapport de deux fonctions dérivables et $h'(x) = \frac{-\cos x \cos x - (-\sin x)(1 - \sin x)}{\cos^2 x} =$

$$\frac{-\cos^2 x + \sin x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{-1 + \sin x}{\cos^2 x} < 0 \quad (\sin x < 1, \text{ pour } x \in]0, \frac{\pi}{2}[)$$

$\Rightarrow h$ est strictement décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

h est de plus continue sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, elle réalise alors une bijection de cet intervalle dans $h(]0, \frac{\pi}{2}[)$.

$h(]0, \frac{\pi}{2}[) = [h(\frac{\pi}{2}), \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)[$. Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(\cotg x)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(X) \quad (X = \cotg x \text{ tend vers } +\infty$$

$$= 1 \quad \text{quand } x \text{ tend vers } 0^+)$$

et $h(\frac{\pi}{2}) = f(\cotg \frac{\pi}{2}) = f(0) = 0$

On en tire que $h(]0, \frac{\pi}{2}[) = [0, 1[= I$.

$\Rightarrow h$ est une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}[$ dans I .

5) On sait que h est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et que $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $h'(x) = \frac{-1 + \sin x}{\cos^2 x} \neq 0$

A gauche en $\frac{\pi}{2}$, on a $h'_g(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2} \neq 0$.

$\Rightarrow h$ est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et h' ne s'annule pas

$\Rightarrow h^{-1}$ est dérivable sur $h(]0, \frac{\pi}{2}[) = I$ et $(h^{-1})'(x) = \frac{1}{h'(h^{-1}(x))}$

Pour $x = 0$, $(h^{-1})'(0) = \frac{1}{h'(h^{-1}(0))} = \frac{1}{h'(\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$.

Pour $x \in]0, 1[$, $(h^{-1})'(x) = \frac{1}{h'(h^{-1}(x))} = \frac{\cos^2(h^{-1}(x))}{-1 + \sin(h^{-1}(x))}$

Mais $x \in]0, 1[\Rightarrow h^{-1}(x) \in]0, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow h(h^{-1}(x)) = \frac{1 - \sin(h^{-1}(x))}{\cos(h^{-1}(x))} = x$

$$\Rightarrow -1 + \sin(h^{-1}(x)) = -x \cdot \cos(h^{-1}(x))$$

$$\Rightarrow (h^{-1})'(x) = -\frac{\cos(h^{-1}(x))}{x} \quad (*)$$

D'autre part $h^{-1}(x) \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\frac{1 - \sin(h^{-1}(x))}{\cos(h^{-1}(x))} = x$ donne

$$\frac{1 - \sqrt{1 - \cos^2(h^{-1}(x))}}{\cos(h^{-1}(x))} = x \Rightarrow \sqrt{1 - \cos^2(h^{-1}(x))} = 1 - x \cdot \cos(h^{-1}(x))$$

$$\Rightarrow 1 - \cos^2(h^{-1}(x)) = 1 + x^2 \cos^2(h^{-1}(x)) - 2x \cos(h^{-1}(x))$$

$$\Rightarrow \cos(h^{-1}(x)) \cdot (x^2 + 1) = 2x \quad (\cos(h^{-1}(x)) \neq 0)$$

$$\Rightarrow \cos(h^{-1}(x)) = \frac{2x}{x^2 + 1} \quad (**)$$

(*) et (**) donnent $\forall x \in]0, 1[$, $(h^{-1})'(x) = \frac{-2}{x^2 + 1}$; cette égalité est vraie aussi pour $x = 0$

On conclut alors, que $\forall x \in [0, 1[$, $(h^{-1})'(x) = \frac{-2}{x^2 + 1}$.

