

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION & DE LA FORMATION
DIRECTION GÉNÉRALE DES PROGRAMMES
& DE LA FORMATION CONTINUE

Direction des Programmes & des Manuels Scolaires

PROGRAMME DE 3^{ème} MATH
ANALYSES

Contenu disciplinaire

• **Fonctions**

Généralités sur les fonctions : Ensemble de définition -Variation - Parité-Restriktion d'une fonction à un intervalle-Majorant-Minorant - Fonction \sqrt{f} - Opérations algébriques sur les fonctions.

Représentation graphique des fonctions affines par intervalles.

Continuité en un réel - Opérations sur les fonctions continues - Continuité sur un intervalle - Image d'un intervalle par une fonction continue- Résolution d'équations de la forme $f(x)=k$.

Limite finie en un réel a –prolongement par continuité- Opérations sur les limites finies- Signe de la limite d'une fonction de signe constant.

Limites finies ou infinies— Asymptotes – Opérations sur les limites finies ou infinies- limites des fonctions usuelles-

Dérivabilité en un point – Approximation affine- Tangente ou demi-tangente en un point- Dérivabilité des fonctions usuelles.

Dérivabilité sur un intervalle – Fonction dérivée – Dérivées des fonctions usuelles- Opérations sur les fonctions dérivées.

Lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation- Extrema locaux.

Etude et représentation graphique de fonctions polynômes du premier degré, du second degré, du troisième degré et bicarrées.

Etude des fonctions du type :

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}, x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}, x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}, x \mapsto \sqrt{ax+b} \text{ et } x \mapsto \sqrt{ax^2+bx+c}.$$

Etude et représentation graphique de fonctions circulaires du type : $x \mapsto \sin(ax+b)$, $x \mapsto \cos(ax+b)$ et $x \mapsto \tan x$.

- **Suites numériques.**

Comportement global d'une suite : Suite croissante – Suite décroissante – Suite majorée – Suite minorée.

Etude des suites arithmétiques, des suites géométriques, des suites $(u_n)_n$ telles que $u_n = f(n)$ où f est une fonction polynôme ou rationnelle et des suites récurrentes du type :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donné.} \end{cases} \text{ où } f \text{ est une fonction affine ou homographique.}$$

Aptitudes à développer

1. Les élèves mobilisent une technique, un algorithme ou une procédure pour :

<p>Fonctions</p> <ul style="list-style-type: none"> • Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction. • Etudier la parité d'une fonction. • Exploiter la restriction d'une fonction à un intervalle. • Représenter une fonction affine par intervalles. <ul style="list-style-type: none"> • Reconnaître si une fonction est continue en un point ou sur un intervalle à partir de son expression algébrique ou d'un graphique. • Déterminer une valeur exacte ou approchée d'une solution d'une équation de la forme $f(x) = k$, dans le cas où f est une fonction continue sur un intervalle. <ul style="list-style-type: none"> • Déterminer la limite éventuelle d'une fonction en un point ou à l'infini. • Reconnaître qu'une droite d'équation $x=a$, $y=a$ ou $y=ax+b$ est une asymptote à la courbe représentative d'une fonction du programme. 	<p>La détermination de l'ensemble de définition, l'étude de la parité et de la périodicité se fera sur les fonctions du programme ou de la forme \sqrt{f} avec f une fonction polynôme ou rationnelle .</p> <p>Tous les résultats concernant les opérations sur les fonctions continues seront admis. Le théorème donnant une condition suffisante pour qu'une équation de la forme $f(x)= k$ possède au moins une solution sera admis. On utilisera la dichotomie pour donner une valeur approchée d'une solution de $f(x)= k$.</p> <p>On donnera les définitions de la limite finie ou infinie d'une fonction en un réel ou à l'infini. On utilisera la notation \limf_a ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.</p> <p>Le calcul de limites n'est pas une fin en soi. A travers des situations variées, on veillera à ce que l'apprenant :</p>
--	--

- utilise les résultats sur les fonctions continues pour déterminer la limite finie d'une fonction.
- utilise les résultats sur les limites finies pour déterminer le prolongement par continuité d'une fonction ;
- interprète graphiquement les limites finies ou infinies en termes d'asymptotes ou de branches paraboliques.
- Utilise une transformation d'écriture adéquate pour déterminer une limite.

- Reconnaître si une fonction est dérivable en un point ou sur un intervalle.
 - Reconnaître que le nombre dérivé d'une fonction en a est la pente de la tangente à la courbe de cette fonction en le point d'abscisse a .
 - Déterminer l'équation de la tangente (ou des demi-tangentes) à une courbe en un point d'abscisse a .
 - Déterminer le nombre dérivé d'une fonction en un réel a connaissant l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction au point d'abscisse a .
 - Déterminer l'approximation affine d'une fonction au voisinage d'un réel a .
 - Donner une valeur approchée de nombre réel en utilisant l'approximation affine d'une fonction au voisinage d'un réel a .
 - Déterminer la dérivée d'une fonction sur un intervalle en utilisant les opérations sur les fonctions dérivables et les dérivées de fonctions usuelles.
 - Déterminer le sens de variation d'une fonction connaissant le signe de sa dérivée.
 - Déterminer le sens de variation d'une fonction à partir de sa représentation graphique.
 - Reconnaître qu'un réel est un extremum local ou global d'une fonction.
-
- Reconnaître qu'un point ou une droite est un centre ou un axe de symétrie.
 - Tracer une courbe représentative d'une fonction à partir d'une autre en utilisant une transformation plane (translation, symétrie axiale ou centrale) ou une transformation d'écriture menant à un changement de repère.
 - Représenter graphiquement des fonctions polynômes du premier degré, du second degré, du troisième degré et bicarrées.
 - Représenter graphiquement des fonctions affines par intervalle et des fonctions du type

On définira le nombre dérivé d'une fonction en x_0 comme étant la limite du taux d'accroissement de cette fonction en a (on pourra donner l'exemple de la vitesse instantanée d'un mobile).

On exploitera le nombre dérivé pour déterminer la limite d'une fonction en un réel.

On admettra le théorème faisant le lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation d'une fonction.

On introduira les notions d'extremum local et global d'une fonction.

La transformation d'écriture et le changement de repère se feront sur des exemples et ne feront pas l'objet d'une étude spécifique.

:

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}, \quad x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{dx+e},$$
$$x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}, \quad x \mapsto \sqrt{ax+b} \quad \text{et}$$
$$x \mapsto \sqrt{ax^2+bx+c}$$

- Représenter graphiquement des fonctions circulaires du type : $x \mapsto \sin(ax+b)$, $x \mapsto \cos(ax+b)$ et $x \mapsto \tan x$.
- Exploiter ou créer un graphique pour étudier la position relative de deux courbes.
- Exploiter ou créer une représentation graphique pour déterminer ou estimer les solutions éventuelles d'une équation ou d'une inéquation.

Suites

- Exploiter le raisonnement par récurrence pour montrer qu'un réel est un majorant ou un minorant d'une suite ou pour étudier les variations d'une suite.
- Connaître la définition d'une suite convergente et d'une suite tendant vers l'infini.
- Exploiter les théorèmes de comparaisons sur les suites convergentes.

Pour la recherche d'asymptotes obliques $y=ax+b$, on amènera l'apprenant à montrer que $f(x)-(ax+b)$ a pour limite zéro quand x tend vers l'infini.

On exploitera la définition d'une suite convergente pour montrer sur des exemples qu'une suite n'a pas de limite.

On se restreindra aux théorèmes suivants, qui seront démontrés en utilisant la définition :

si $u_n \leq v_n, n \geq n_0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

si $u_n \leq v_n, n \geq n_0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

si $|u_n| \leq v_n, n \geq n_0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ alors

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

- Calculer un terme d'une suite du type $u_n = f(n)$ où f est une fonction polynôme ou rationnelle.

- Représenter graphiquement les points A_n de coordonnées (n, u_n) , dans le cas où $(u_n)_n$ est une suite du type $u_n = f(n)$ où f est une fonction du programme.

- Déterminer la limite éventuelle d'une suite du type $u_n = f(n)$ où f est une fonction polynôme ou rationnelle en utilisant les résultats sur les limites de fonctions ou en utilisant un théorème de comparaison.

- Connaître la limite d'une suite arithmétique ou géométrique.

- Donner l'écriture fractionnaire d'un rationnel connaissant son développement décimal illimité périodique.

- Calculer un terme d'une suite récurrente du type $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donné.} \end{cases}$ où f est une fonction affine ou homographique.

- Représenter graphiquement les points A_n de coordonnées (n, u_n) , dans le cas où $(u_n)_n$ est une suite récurrente du type $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donné.} \end{cases}$ où f est une fonction affine ou homographique.

- Représenter sur l'un des axes du repère les termes d'une suite récurrente $(u_n)_n$ du

Le calcul d'un terme d'une suite se fera à la main ou à l'aide de la calculatrice ou d'un tableur.

L'un des objectifs de la représentation graphique des points A_n de coordonnées (n, u_n) , est d'émettre une conjecture sur le sens de variation ou la limite éventuelle de la suite $(u_n)_n$.

Les résultats concernant la limite d'une suite arithmétique ou géométrique seront démontrés.

On exploitera la somme de n termes d'une suite géométrique.

L'étude de ces suites récurrentes se fera au moyen d'une suite auxiliaire géométrique.

On exploitera les suites

<p>type $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donné.} \end{cases}$ où f est une fonction affine ou homographique.</p> <p>• Déterminer la limite éventuelle d'une suite récurrente du type $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donné.} \end{cases}$ où f est une fonction affine ou homographique.</p>	<p>homographiques pour donner des exemples de suites de nombres rationnels qui convergent vers un irrationnel.</p>
---	--

2. Les élèves résolvent des problèmes dans des situations mathématiques ou en rapport avec l'environnement faisant appel à des suites ou à des fonctions du programme.

En particulier :

- Ils résolvent des problèmes puisés dans des situations réelles pouvant être modélisées par une suite ou une fonction du programme.
- Ils résolvent des problèmes d'optimisation.

Statistiques - Probabilités

Contenu disciplinaire :

- Séries statistiques à un caractère : paramètres de position, de dispersion.
- Séries statistiques à deux caractères :
Tableau à deux entrées, distributions marginales, fréquences marginales - paramètres de position et de dispersion des distributions marginales. Nuage de points, point moyen.
- Probabilité uniforme :
Définition d'une loi de probabilité sur un ensemble fini – Probabilité de la réunion et de l'intersection de deux évènements – Cas de l'équiprobabilité- Epreuves successives indépendantes- Epreuves successives dépendantes.

Aptitudes à développer

1. Les élèves mobilisent une technique ou une procédure dans des activités portant sur les phénomènes aléatoires pour :

<ul style="list-style-type: none">• Résumer une série statistique à un caractère et déterminer ses paramètres de position et de dispersion.• Interpréter une distribution normale.• Organiser une série statistique à deux caractères dans un tableau à deux entrées et déterminer ses distributions marginales ainsi que leurs paramètres de position et de dispersion.• Représenter à l'aide d'un nuage de points une série statistique à deux caractères et déterminer son point moyen.• Estimer la probabilité d'un événement à partir de sa fréquence de réalisation.• Calculer la probabilité d'un événement dans le cas d'équiprobabilité.• Calculer la probabilité d'un événement dans le cas d'épreuves successives indépendantes.• Calculer la probabilité d'un événement dans le cas d'épreuves successives dépendantes.	<p>L'étude des séries statistiques se fera sur des exemples puisés dans l'environnement de l'apprenant.</p> <p>On initiera l'apprenant à faire des raisonnements statistiques pour interpréter les résultats.</p> <p>On sensibilisera l'apprenant, à travers des simulations d'expériences aléatoires, à distinguer entre le modèle probabiliste et celui statistique.</p>
--	--

	On amènera l'apprenant à utiliser un arbre de choix pour déterminer la probabilité d'un événement.
--	--

2. Les élèves résolvent des problèmes dans des situations mathématiques ou en rapport avec l'environnement.

En particulier , ils résolvent des problèmes puisés dans des situations réelles menant à un modèle statistique ou probabiliste.

Géométrie

Contenu disciplinaire

- Produit scalaire dans le plan.
- Arcs orientés- Cercle trigonométrique et arcs associés - Angles orientés- Angle inscrit, angle au centre associé– Déterminant de deux vecteurs.
- Trigonométrie :
Cosinus, sinus et tangente d'un réel – Coordonnées polaires– Cosinus et sinus d'un angle orienté.

Formules trigonométriques d'addition, de multiplication par 2.

Résolution d'équations et d'inéquations de la forme $\cos(ax+b) = c$, $\sin(ax+b) = c$, $\tan x = c$,

$$\cos(ax+b) \geq c, \sin(ax+b) \geq c, \tan x \geq c$$

$$\cos(ax+b) \leq c, \sin(ax+b) \leq c, \tan x \leq c$$

- Rotations dans le plan.
- Nombres complexes :
Partie réelle et imaginaire d'un nombre complexe – Affixe d'un point, d'un vecteur – Conjugué d'un nombre complexe – Somme, produit, quotient de deux nombres complexes – Module et argument d'un nombre complexe, d'un produit ou d'un quotient de deux nombres complexes.

- Vecteurs de l'espace- Déterminant de trois vecteurs.- Produit scalaire et produit vectoriel dans l'espace.
- Equations de droites, de plans et de sphères.
- Position relative de droites et plans.
- Intersection d'un plan et d'une sphère.

Aptitudes à développer

1. Les élèves mobilisent une technique ou une procédure lors d'activités géométriques pour :

- Exploiter les propriétés du produit scalaire dans le plan.
- Exploiter le produit scalaire dans le plan pour calculer des grandeurs, déterminer des lieux géométriques et étudier des configurations géométriques.
- Déterminer une mesure algébrique d'un arc orienté.
- Repérer un point sur le cercle trigonométrique.
- Déterminer une mesure principale d'un angle orienté.
- Exploiter les propriétés des angles orientés.
- Reconnaître et construire les ensembles de points M du plan vérifiant $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) \equiv \alpha [2\pi]$ où α est un réel.
- Exploiter le déterminant de deux vecteurs.
- Calculer le sinus, le cosinus et la tangente d'un réel.
- Déterminer les coordonnées polaires d'un point à partir de ses coordonnées cartésiennes et réciproquement.
- Exploiter les formules trigonométriques de sommation et de multiplication par 2 pour déterminer des angles ou pour résoudre des équations ou des inéquations
- Représenter sur le cercle trigonométrique les solutions des équations ou inéquations de la forme

$$\cos(ax+b) = c, \sin(ax+b) = c, \tan x = c.$$

$$\cos(ax+b) \geq c, \sin(ax+b) \geq c, \tan x \geq c.$$

$$\cos(ax+b) \leq c, \sin(ax+b) \leq c, \tan x \leq c.$$
 où a, b et c sont des réels (a non nul).
- Exploiter la définition et les propriétés d'une rotation.
- Déterminer la composée de deux rotations de même centre.
- Exploiter les opérations sur l'ensemble \mathbb{C} des

La détermination des lignes de niveaux ne fera pas l'objet d'une étude spécifique mais se fera sur des exemples.

Pour résoudre des équations ou

nombres complexes.

des inéquations, on amènera l'apprenant à exploiter la transformation de l'expression

$$a \cos x + b \sin x \text{ en } r \cos(x - \varphi).$$

On sensibilisera les apprenants à ce que les opérations sur \mathbb{C} généralisent celles sur \mathbb{R} .

- Déterminer le conjugué d'un nombre complexe.
- Déterminer le module et un argument d'un nombre complexe.
- Déterminer l'écriture trigonométrique d'un nombre complexe.
- Repérer un point dans le plan orienté connaissant son affixe, ses coordonnées cartésiennes ou ses coordonnées polaires.
- Exploiter le module et l'argument du produit ou du quotient de deux nombres complexes.
- Exploiter les opérations sur les vecteurs de l'espace.
- Reconnaître que trois vecteurs de l'espace forment une base.
- Exploiter les propriétés du produit scalaire dans l'espace.
- Exploiter le produit scalaire dans l'espace pour calculer des grandeurs, déterminer des lieux géométriques et étudier des configurations géométriques.
- Exploiter les propriétés du produit vectoriel dans l'espace.
- Exploiter le produit vectoriel dans l'espace pour calculer des grandeurs, déterminer des lieux géométriques et étudier des configurations géométriques.
- Déterminer les représentations paramétriques d'une droite ou d'un plan.
- Déterminer les équations cartésiennes

On amènera l'apprenant à établir la correspondance entre l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes et le plan orienté.

d'une droite ou d'un plan.

- Identifier une droite de l'espace ou un plan à partir de leurs représentations paramétriques ou cartésiennes.
- Déterminer une équation cartésienne d'une sphère.
- Déterminer l'intersection de deux plans, d'une droite et d'un plan, de deux droites, d'un plan et d'une sphère de l'espace.

2. Les élèves résolvent des problèmes dans des situations mathématiques ou en rapport avec l'environnement.

En particulier :

- Ils résolvent des problèmes d'alignement, de concours, de lieu ou métriques.
- Ils résolvent des problèmes puisés dans des situations réelles menant à un modèle géométrique.
- Ils résolvent des problèmes d'optimisation

Arithmétique et dénombrement

Contenu disciplinaire

- Dénombrement –cardinal d'un ensemble fini- Combinaison – Permutation - Arrangement- - Formule du binôme.
 - Principe de récurrence.
 - Division euclidienne dans \mathbb{N} .
- PGCD – PPCM - Nombres premiers entre-eux. Lemme de Gauss.
-
- Nombres premiers : théorème d'Euclide. Le petit théorème de Fermat. Théorème fondamental de l'arithmétique.

Aptitudes à développer

1. Les élèves mobilisent une technique, un algorithme ou une procédure de calcul pour :

<ul style="list-style-type: none">• Dénombrer les éléments d'un ensemble fini.• Développer des expressions binomiales en utilisant la formule du binôme. • Démontrer une propriété sur les entiers naturels en utilisant le principe de récurrence.• Exploiter les propriétés de la divisibilité dans \mathbb{N}.	<p>On amènera l'apprenant à construire des arbres de choix.</p> <p>* On se restreindra à l'utilisation des propriétés de divisibilité dans \mathbb{N} suivantes :</p> <p>P₁ : Pour tout entier a, les entiers a, 1, -</p>
---	---

<ul style="list-style-type: none"> • Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne d'un entier naturel par un entier naturel non nul. • Calculer le PGCD et le PPCM de deux entiers naturels non nuls. • Reconnaître que deux entiers naturels sont premiers entre eux. • Exploiter le lemme de Gauss. • Reconnaître qu'un entier est premier. • Exploiter le théorème d'Euclide. • Exploiter le théorème fondamental de l'arithmétique. • Exploiter le petit théorème de Fermat. 	<p>1 et $-a$ divisent a.</p> <p>P₂ : Pour tout entiers a et b.</p> <p>a divise b et b divise $a \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$.</p> <p>P₃ : Pour tout entiers a, b et c.</p> <p>a divise b et b divise $c \Rightarrow a$ divise c.</p> <p>P₄ : Pour tout entiers a, b et d.</p> <p>d divise a et $b \Rightarrow d$ divise toute combinaison linéaire de a et b.</p> <p>Notation : l'expression a divise b est notée $a b$.</p> <p>* Division euclidienne dans \mathbb{N} :</p> <p>Soit a un entier naturel et b un entier naturel non nul.</p> <p>Alors il existe un unique couple $(q ; r)$ d'entiers vérifiant $\begin{cases} a = bq+r \\ 0 \leq r < b. \end{cases}$</p> <p>$q$ est le quotient et r est le reste de la division euclidienne de a par b.</p> <p>On utilisera les notations \wedge et \vee.</p> <p>* Pour reconnaître qu'un entier est premier, on amènera l'apprenant à utiliser le théorème suivant :</p> <p>Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1.</p> <p>n est premier $\Leftrightarrow n$ n'admet aucun diviseur premier inférieur ou égal à \sqrt{n}.</p> <p>* Le théorème fondamental de l'arithmétique sera énoncé comme suit :</p>
---	---

	<p>Tout entier naturel n, différent de 0 et 1 s'écrit de manière unique sous la forme d'un produit :</p> <p>$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, où p_1, p_2, \dots, p_k sont des nombres premiers tels que $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sont des entiers naturels non nuls.</p> <p>On démontrera l'existence de la décomposition et on admettra son unicité.</p>
--	--

2. Les élèves résolvent des problèmes numériques dans des situations mathématiques ou en rapport avec leur environnement dans des contextes familiers ou non familiers.

En particulier,

- les élèves résolvent des problèmes d'arithmétique ou de dénombrement.
- Les élèves résolvent des problèmes puisés dans des situations réelles menant à un modèle arithmétique.